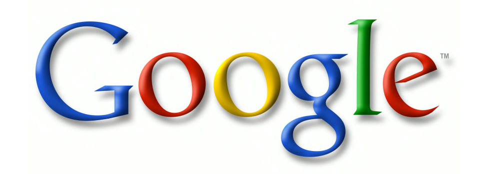
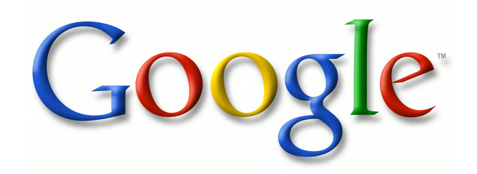




F Bühring.

Verwendung des prinzips der

erhaltung der energie

Verwendung

des

Prinzips der Erhaltung der Energie

bei dem

Unterrichte in der elementaren Mechanik der starren Körper.

Von dem wissenschaftlichen Hilfslehrer Bühring.

Programm-Beilage.

1894. Progr.-Nr. 257.

Druck von B. Angerstein, Wernigerode a. H.

Wenn man die physikalisch-didaktischen Schriften unserer Schulphysiker betrachtet, so findet man in der einen der geschichtlichen Behandlung des Stoffes, in der andern der mathematischen, in wieder einer der naturbeschreibenden, induktiven Behandlung das Wort geredet; ganz abgesehen von den utopischen Forderungen der Herren, welche nicht mit gegebenen Gröſsen rechnen, wie der zur Verfügung stehenden Zeit, den lehrplanmäſsigen Anforderungen an die Schüler auch in anderen Lehrfächern, dem Charakter unserer wirklich bestehenden Lehranstalten u. s. f.

Tritt man den Gründen näher, welche in letzter Linie zu den Vorschlägen der verschiedenen Behandlungsarten geführt haben, so sind dieselben meist subjektiver Natur und zu suchen in dem Bildungsgange und der Interessenrichtung des betreffenden Lehrers.

In der That kann durch die Wissenschaft selbst die Wahl der Behandlungsart weit weniger bedingt sein, als durch die Vorbildung und Auffassungsgabe des Schülercötus und durch die Individualität des Lehrers.

So wenig es Aufgabe des Geschichtsunterrichts ist, Historiker heranzubilden, so wenig ist es Aufgabe des physikalischen Unterrichts, Physikern eine Fachbildung zu geben. Vielmehr sollen, wie alle, so auch diese Unterrichtsfächer vor allem das Interesse für ihre Gegenstände wecken. Dies wird aber am besten gelingen, wenn die Begeisterung des Fachmannes, die nur durch dauernde Weiterbeschäftigung mit dem Fache erhalten bleiben kann, wieder beim Unterrichte Verwertung findet. So wird der Historiker, um bei diesem Vergleiche zu bleiben, besonders fruchtbar wirken in dem von ihm selbst als Lieblingsgebiet erwählten Zweige seiner umfassenden Wissenschaft. Gerade so der Physiker:

Derjenige, welchem besonders der Gang der geschichtlichen Entwicklung seiner Wissenschaft am Herzen liegt oder der, welcher die technische Seite derselben zu verfolgen pflegt, sie werden am anregendsten wirken, wenn sie ihre eigenartige Richtung im Unterrichte verwerten und an eigener Neigung die der Schüler entzünden.

Immerhin wird aber bei der dem physikalischen Unterrichte nicht gerade reichlich zugemessenen Zeit niemand in der Praxis um die Frage herum kommen: wie erleichtert man dem Schüler das Eindringen in die Grundbegriffe, ohne ihm dabei den Ausblick zu schmälern, den die weittragende Bedeutung der physikalischen Grundgesetze bietet. Die grofse, alljährlich wachsende Anzahl unserer physikalischen Leitfäden und Lehrbücher sind gewissermafsen Antworten auf diese Frage. So verschieden nun diese Antworten ausfallen, so verschieden wird der Lehrende von Fall zu Fall seine Entscheidung treffen müssen. Diese Freiheit der Entscheidung mufs dem Lehrer gewahrt bleiben, sie darf durch keinen pädagogischen Schematismus und nicht durch die zwingende Form eines Leitfadens verkümmert werden.

Schlagworte wie „das Wesen der naturwissenschaftlichen Forschung werde durch die Induktion gekennzeichnet" dürfen nicht beirren. Kaum ein wichtiges physikalisches Gesetz ist auf dem Wege der Induktion gewonnen, sie entstammen fast alle der Intuition bevorzugter Männer, um dann allerdings durch Induktion geprüft und bewiesen zu werden. Soll der Schüler erst dann, nachdem er durch eine grofse Anzahl von koordinierten Experimenten und Einzelthatsachen hindurchgeführt ist, den leitenden Faden in die Hand bekommen, an dem er sich in dieser Zahl zurecht findet, oder mufs man nicht vielmehr fürchten, dafs der Zusammenhang der Einzelthatsachen dem Schüler nachträglich kaum noch zum Bewufstsein kommt, geschweige zu wünschenswerter Klarheit. In wiederholter Vorführung der Experimente und Thatsachen aber gewissermafsen den Weg rückwärts noch einmal machen zu lassen, würde dem Zeitaufwande nicht entsprechende Resultate liefern, insbesondere da wiederholte Vorführungen von Versuchen des besonderen Interesses beraubt wären, welches allen neuen Experimenten anhaftet.

Besser läfst es sich mit offenen Augen durch eine Mannigfaltigkeit von Thatsachen hindurcharbeiten, wenn man ein an einigen Versuchen demonstriertes, leitendes und beherrschendes Grundgesetz anschaulich erkannt hat. Dabei braucht die heuristische Lehrweise nicht im geringsten ver-

absäumt zu werden, dient sie doch dazu, den Schüler möglichst sicher Schritt für Schritt, ohne Sprung oder gar Lücke von Gedanken zu Gedanken zu leiten, bis ihm das Ziel mit greifbarer Klarheit vor Augen liegt. Auch das Experiment bleibt im Vordergrunde, aber das Verständnis desselben ist mehr fundiert und dadurch erleichtert. Entlastet aber wird das schon durch den sonstigen Unterricht genügend in Anspruch genommene mechanische Gedächtnis; denn durch die leichtere Assimilation der als gleichartig erkannten Thatsachen und durch die Erkenntnis des durch das Grundgesetz gewonnenen inneren Zusammenhanges werden nunmehr im wesentlichen die Anforderungen an das judiciöse Gedächtnis erhöht.

Aufserordentliche Vereinfachungen gewährt aber nicht selten die deduktive Ausnutzung eines leitenden Prinzips hinsichtlich des Hilfsmaterials, welches zur Erklärung physikalischer Thatsachen nötig ist. Auch hier also kann man eine Entlastung des Lernenden erreichen.

Nachdem nun noch durch die neuen Lehrpläne vom Jahre 1891 der Unterricht in der Physik in zwei Kursen angeordnet ist, bringt der Schüler, welcher den Vorkursus absolviert hat, schon soviel physikalische Vorkenntnisse dem Unterricht in dem zweiten Kursus entgegen, dafs an sie anknüpfend hier für gewisse Zweige ein deduktives Entwicklungsverfahren fruchtbringender sein dürfte, als eine durch Zusätze erweiterte Wiederholung des vorbereitenden Kursus. Doch soll hiermit nicht gesagt sein, dafs nicht auch im Vorkursus schon, soweit die mathematischen Hilfsmittel ausreichen, zuweilen mit Vorteil von einem derartigen Entwicklungsverfahren Gebrauch gemacht werden könnte.

Besonders die Mechanik, die durchsichtigste der physikalischen Disciplinen, verträgt nicht nur eine solche Behandlung, sondern rechtfertigt dieselbe durch ihre Stellung als verbindendes Glied zwischen Mathematik und Physik. Ist doch die Mechanik als Wissenschaft a priori aufgefafst, als Lehre von der Bewegung der Raumgebilde, nichts als ein Teil der Mathematik. Von diesem Teile der Mathematik bildet die physikalische Mechanik wiederum nur den Teil, welchen die Physik als Erfahrungswissenschaft auswählt durch die, Messung und Rechnung ausgiebig verwertende, also exakte Beobachtung.

Da nun die neuen Lehrpläne die Behandlung der Mechanik der Unter-Prima zugewiesen haben (Lehrpläne und Lehraufgaben S. 54) mit der im mathematischen Unterrichte nebenhergehenden Aufgabe: Wiederholung des arith-

metischen Pensums der früheren Klassen an Uebungsaufgaben (Lehrpl. und Lehraufg. S. 47), so könnte dies vielleicht als ein Wink aufgefafst werden, hier die Mechanik mehr als mathematische Wissenschaft anzusehen und dieselbe demgemäfs auch zu behandeln, soweit es mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Hilfsmitteln möglich ist.

Durch die Verwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie wird dies in ausgiebigster Weise erreicht und zwar, ohne dafs dadurch der Unterricht an naturwissenschaftlicher Anschaulichkeit einbüfste. Vielmehr hat die Benutzung dieses Prinzips den Vorteil, dafs die Coordination in der Anordnung der einzelnen mechanischen Gesetze durch eine Ordnung nach innerem Zusammenhange ersetzt wird und die zum Teil recht gekünstelt erscheinenden Beweise von Fall zu Fall verdrängt werden durch gleichmäfsig gebaute, die noch dazu den Vorzug grofser Einfachheit und Anschaulichkeit besitzen.

Diese Erwägungen allein würden die Benutzung des Prinzips der Erhaltung der Energie genügend rechtfertigen. Jedoch kommen noch weitere bedeutsame Gründe hinzu, welche es wünschenswert erscheinen lassen, dafs dem Schüler dieses Prinzip durch eingehende Verarbeitung möglichst in Fleisch und Blut übergeführt wird. Ist doch dieses Prinzip das gemeinsame Fundament geworden, auf dem nicht nur die Teile der Mechanik gegründet stehen, sondern die gesamten Gebiete der durch Rechnung zugänglichen Physik.

Nicht unwesentlich ist es ferner, dass dem Lehrplan entsprechend die Behandlung der Chemie den Sekunden zugewiesen ist. Ist doch anzunehmen, dass die Schüler durch Absolvierung des chemischen Schulpensums sich das Grundprinzip der Chemie, das Prinzip der Erhaltung des Stoffes, ganz zu eigen gemacht haben durch die vielfache, fast fortwährende Verarbeitung in den auch rechnungsmäfsig zu lösenden Aufgaben der Chemie. Hat der Schüler da die Wichtigkeit und die umfassende Bedeutung dieses chemischen Prinzips erkannt, so wird das Analogon in der Physik, das Prinzip der Erhaltung der Energie, am besten vorbereitet sein.

Lehrreich endlich, wie die Geschichte des Energie-Prinzips, ist die Geschichte kaum eines andern physikalischen Gesetzes oder Hypothese. Zwar weisen die Spuren der Erkenntnis dieses Prinzips nicht in entlegene Zeiten zurück, will man nicht, wie es allerdings vielfach beliebt wird, in allgemein oder mystisch gehaltenen Aussprüchen ein Auf-

dämmern des Prinzips erkennen. Dafür aber liegt die Geschichte der, man kann sagen, dreifachen Entdeckung des Prinzips ebenso klar und offen vor uns, als die bis in die siebenziger Jahre vorigen Jahrhunderts zurückreichende Vorgeschichte.[1]) Der Abschlufs der Geschichte dieses Prinzips ist allerdings nicht abzusehen; jedes Jahr bringt Erweiterungen des Verwendungsgebietes dieses überaus fruchtbringenden Prinzips, sowohl in der Theorie als in der Technik. In allen Zweigen des physikalischen Erkennens und Arbeitens wirkt das Prinzip fördernd und klärend, die früher als durchaus heterogen angesehenen Disziplinen verknüpfen sich innerlich mehr und mehr gerade durch dieses Prinzip, so dafs man wohl behaupten kann, es liefere den gröfsten Beitrag zu der Verwirklichung eines lang gehegten Wunsches, zur Herbeiführung der Einheit des Naturerkennens.

Die Grundbegriffe der Mechanik, welche der Begriff der Energie voraussetzt.

A. Vorbereitung durch den mathematischen Unterricht.

Schon früh hat die Vorbereitung des Verständnisses der physikalischen Formelsprache beginnen können, durch eine geeignete, bereits in der Quinta mögliche Betrachtung der gegenseitigen Abhängigkeit der in der Bruchrechnung vorkommenden Gröfsen. Hier kann es für die Erreichung des der Klasse gestellten Lehrzieles nur durchaus vorteilhaft sein, den Schülern zu zeigen, wie der Wert eines Bruches abhängig ist von Zähler und Nenner, wie er wächst, wenn der Zähler wächst oder der Nenner abnimmt, wie der Bruchwert um das doppelte, dreifache, vierfache wächst, wenn der Zähler, bei gleichbleibendem Nenner, um das doppelte, dreifache, vierfache wächst, oder wenn der Nenner bei gleichbleibendem Zähler auf die Hälfte, den dritten, den

---

[1]) Vergl. u. A. Weyrauch, das Prinzip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer.

Weyrauch. Robert Mayer, der Entdecker des Prinzips von der Erhaltung der Energie.

Rob. Mayer, Kleinere Schriften und Briefe, nebst Mitteilungen aus seinem Leben. Herausgegeben von Prof. Dr. Weyrauch.

Rob. Mayer. Die Mechanik der Wärme, in gesammelten Schriften von Rob. Mayer, ergänzte und mit historisch litterarischen Mitteilungen versehene Auflage. Herausgeg. von Prof. Dr. Weyrauch.

H. Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft.

vierten Teil zurückgeht; alles anschaulich erläutert durch Teile einer Strecke, einer Kreisfläche oder sonstige, leicht sich darbietende Beispiele aus dem praktischen Leben. In der Quarta bei der mannigfachen Anwendung der Brüche zur Lösung der (Lehrpläne S. 46) geforderten einfachen und zusammengesetzten Regeldetriaufgaben, wird der Begriff von direkt und umgekehrt proportionalen Gröfsen aufserordentlich vorteilhaft zu verwenden sein und anschaulich erkannt werden müssen. In den Tertien wird aufser durch die Uebungen in der Berechnung von (auch eingekleideten) Gleichungen und die in der Ober-Tertia speziell vorgeschriebenen Uebungen in der Bruchrechnung, dem erweiterten Erfahrungskreise angemessen, eine Vertiefung des Begriffes der Proportionalität erreicht sein, zumal auch in der Ober-Tertia die Anfangsgründe der planimetrischen Aehnlichkeitslehre dem Lehrpensum mit angehören.

Die von den Lehrplänen verlangte Berechnung der Flächen geradliniger Figuren gestattet es ferner, die in dem arithmetischen Ausdrucke wiedergegebenen Dimensionen der betreffenden Figuren zu erörtern und so schon hier den Begriff der Dimension physikalischer Formelausdrücke vorzubereiten, ein Begriff, der für den Aufbau und die Kontrole der physikalischen Formeln gleich wichtig ist, wie für ihre, das Gedächtnis aufserordentlich unterstützende Rekonstruktion.

B. Eigentliche physikalische Vorbegriffe.

In der Ober-Tertia tritt nun die Physik an die Stelle der beschreibenden Naturwissenschaften. Da wird denn in dem Physikunterrichte nicht versäumt werden, diese Wissenschaft als messende, rechnende Naturwissenschaft durch die Art ihres Betriebes schon auf der Unterstufe des Gymnasiums zu kennzeichnen.

Die Grundmafse.

Der Gebrauch des Längenmafsstabes, der Wage und des Sekundenpendels muss dem Schüler früh geläufig werden, werden doch damit die Grundeinheiten der physikalischen Mafse bestimmt, die Längen-, Gewichts- (resp. Massen-) und Zeiteinheit. Wünschenswert ist es, dafs jeder Schüler selbst wenigstens eine genauere Längen- und Gewichtsbestimmung ausführt. Es schliefst sich daran die Ableitung der Begriffe der Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung, der Beschleunigung bei gleichmäfsig beschleunigter Bewegung.

Gleichförmige Geschwindigkeit.

Die Art der durch die vorhin erwähnte Vorbereitung angezeigte Gröfsenbestimmung und Formelentwicklung für diesen physikalischen Begriff möge hier folgen: Vergleicht man die Geschwindigkeit zweier bewegter Körper, so hat derjenige die gröfsere, welcher in derselben Zeit die gröfsere Strecke durchläuft. Geschätzt wird also in diesem Falle die Gröfse der Geschwindigkeiten durch den Vergleich zweier Strecken. Andererseits ist die Geschwindigkeit eines Körpers um so gröfser, je kleiner das Zeitintervall ist, welches er zum Durchmessen derselben Strecke gebraucht. — Vergeblich wird man sich bemühen, den Begriff der Masse mit der Geschwindigkeit irgend wie in Zusammenhang zu bringen. — Die drei Grössen: Geschwindigkeit, Weg und Zeit verhalten sich zu einander, wie Wert, Zähler und Nenner eines Bruches. So wird die Geschwindigkeit die doppelte, dreifache, n-fache, wenn entweder der in derselben Zeit zurückgelegte Weg der doppelte, dreifache, n-fache ist, oder die auf ein- und dieselbe Strecke verwendete Zeit die Hälfte, den dritten oder n-ten Teil der ursprünglich benötigten beträgt. Es mufs demnach sein:

$$1.)\ c = \frac{s}{t}$$

Die Mafseinheit für die Geschwindigkeit ergiebt sich aus der gleichzeitigen Annahme des Einheitswertes für Wegstrecke und Zeit.

Da in dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit nur die Grundeinheiten s und t vorkommen, so giebt die rechte Seite von Gleichung 1. auch direkt die Dimension der Geschwindigkeit an. Man pflegt in der Dimensionsgleichung eine Schreibweise anzuwenden, welche die Bruchform umgeht. In diesem Falle hat sie das Aussehen:

$$1^*.)\ (dim\ c) = s\ .\ t^{-1}.$$

Beschleunigung.

Ein Körper befindet sich in beschleunigter (verzögerter) Bewegung, wenn von Geschwindigkeiten, welche in verschiedenen aufeinanderfolgenden Zeitpunkten gemessen werden, stets die früher gemessene kleiner (gröfser) ist, als die später gemessene. Die Beschleunigung ist dann eine gröfsere, wenn der Geschwindigkeitszuwachs in gleichen Zeiten ein gröfserer ist oder, wenn derselbe Geschwindigkeitszuwachs in kürzeren Zeitintervallen erreicht wird. Die zu den Zeiten t und t' beobachteten Geschwindigkeiten sind v und v' also ist der Geschwindigkeitszuwachs während der

Zeit $t'-t$ gleich $v'-v$. Die Beschleunigung also $\frac{v'-v}{t'-t}$. Ist der Geschwindigkeitszuwachs der doppelte, n-fache, so ist die Beschleunigung die doppelte, n-fache; ist das Zeitintervall nur die Hälfte, der n^{te} Teil von demjenigen, in welchem ein bestimmter Geschwindigkeitszuwachs erzielt wird, so ist der Betrag der Beschleunigung der doppelte, n-fache.

Die Beschleunigungseinheit wird erreicht, wenn man in der Zeiteinheit die Einheit des Geschwindigkeitszuwachses erhält, also wenn $v'-v = 1$ und $t'-t = 1$.

Die Geschwindigkeit bei gleichförmig beschleunigter Bewegung wächst in gleichen Zeiträumen, also auch in den Zeiteinheiten, um gleichviel. Den Zuwachs der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit nennt man die Beschleunigung. Sie ist die doppelte, n-fache, wenn die Geschwindigkeit in einer Sekunde um den doppelten n-fachen Betrag anwächst oder wenn der gleiche Geschwindigkeitszuwachs in der Hälfte, in dem n^{ten} Teile der Zeiteinheit erreicht wird. Es mufs also sein:

$$2.)\quad a = \frac{v}{t}$$

Dasselbe ergäbe sich aus dem Ausdruck $\frac{v'-v}{t'-t}$ für die Werte $v = o$ und $t = o$.

Die Beschleunigung hat den Wert $a = 1$, wenn $v = 1$ und $t = 1$ ist, d. h. wenn in einer Sekunde die Geschwindigkeit um die Geschwindigkeitseinheit wächst.

Zurückgeführt auf die physikalischen Grundmafse, ergiebt sich für die Beschleunigung die Dimensionsgleichung:

$$2.^*)\quad (dim.\ a) = s.\ t^{-2}.$$

Kraft.

Wie der Begriff der Geschwindigkeit sofort zur Bildung des Begriffes der Beschleunigung verwertet wurde, so verwendet man den Begriff der Beschleunigung zur Entwicklung des Begriffes der Kraft.

Weit mehr als jede andere physikalische Mafsgrösse wird gerade die Kraft anthropomorphisch aufgefafst, häufig auch als etwas selbständig Existierendes gedacht. Für die physikalische Begriffsbestimmung an sich ist dies durchaus gleichgültig. Da aber der Name für den physikalischen Begriff nicht ohne Grund dem Sprachgebrauche entlehnt ist, so kann daran angeknüpft werden, wenn die physikalische

(mechanische) Bedeutung des Kraftbegriffs formelmäfsig präzisiert werden soll.

Mit Sicherheit beurteilt man die Gröfse einer Kraft nur nach ihrer Wirkung, so die Körperkraft eines Menschen. Demjenigen Menschen schreibt man die gröfsere Kraft zu, welcher im stande ist, eine schwerere Eisenstange gerade soweit zu schleudern, wie ein anderer, der dasselbe Ziel nur mit einer leichteren zu erreichen vermag. In diesem Falle richtet sich also die Beurteilung der Kraftgröfse nach der Gröfse der Masse, welche bewegt wurde. Andererseits würde man denjenigen mit Recht für kräftiger halten, welcher dieselbe Masse am weitesten schleudert. Da nun die erreichte Entfernung abhängig ist von der Beschleunigung, welche der Masse im Moment des Abfliegens erteilt wird, so wird im Grunde die Gröfse der zur Geltung gekommenen Kraft mit gemessen durch die Beschleunigung, welche durch sie erteilt wurde.

Die Gröfse der Kraft wird die doppelte, dreifache, n-fache, wenn entweder die Masse oder die Beschleunigung die doppelte, dreifache, n-fache wird. Daher ist das physikalische Mafs der Kraft auszudrücken durch die Formel:

$$f = m.\,a \text{ oder, } da\ a = \frac{v}{t},$$

$$3.)\ f = \frac{mv}{t}$$

Die Mafseinheit für die Kraft wird gewonnen, wenn $m = 1$; $v = 1$; $t = 1$ wird, d. h. die Krafteinheit gehört dazu, der Masseneinheit die Beschleunigung $a = 1$ zu erteilen. Hier im Kraftbegriffe treten zum ersten Male alle drei physikalischen Grundmafse als bestimmende Gröfsen auf, direkt durch die Grundeinheiten ausgedrückt, ergiebt sich für die Kraft die Dimensionsgleichung:

$$3.^{*})\ (dim.\ f) = m\ s\ t^{-2}$$

Ein Beispiel für die Kraft bildet die Schwerkraft, sie bewirkt den Fall der Körper, d. h. erteilt jeder frei beweglichen Masse eine Beschleunigung. Wird aber die Masse an der Ausführung der intendierten Bewegung gehindert, so hat nicht die Schwerkraft zu wirken aufgehört, sondern es hat sich eine Kraft gefunden, welche die Schwerkraftswirkung aufhebt. Es kann demgemäfs der Widerstand, den eine Unterlage dem durch die Schwere einer Masse hervorgerufenen Drucke entgegensetzt, gemessen werden durch dasselbe Mafs, wie die absolut genommen gleiche, auf die Masse wirkende Schwerkraft. Der Druck ist demnach proportional der Masse und der intendierten Beschleunigung;

derselbe heiſst das Gewicht[1]) der betreffenden Masse und wird durch die Formel gegeben:

$$4.)\ P = m\ g.$$

Hier bedeutet g die Fallbeschleunigung des betreffenden Beobachtungsortes. Das Gewicht ist danach von derselben Dimension, wie die Kraft.

Auf allen Punkten der Erde weist die Richtung der Schwerkraft nach dem Erdmittelpunkte, sowohl durch die Richtung des frei fallenden Körpers, als durch die Richtung des Lotes. Man kann deshalb den Mittelpunkt der Erde als Ausgangspunkt aller Schwerkraftswirkungen ansehen. Erfahrungsgemäſs ändert nun die Schwerkraft ihren Wert mit der Entfernung der ihr unterworfenen Masse vom Erdmittelpunkt, wogegen alle Orte gleicher Entfernung vom Erdmittelpunkte, d. i. die auf derselben um den Erdmittelpunkt gedachten Kugel belegenen Orte der gleichen Wirkung der Schwerkraft ausgesetzt sind.

Alle übrigen physikalischen Kräfte lassen sich ihrer Gröſse nach mit der Schwerkraft vergleichen und durch sie messen, auch wenn dieselben etwa in anderer Richtung wirken als die Schwerkraft.

Die den Kräften zukommenden Eigenschaften der Gröſse und der Richtung gestatten, (wie auch die Geschwindigkeiten) die graphische Darstellung von Kräften durch gerichtete Strecken. Sind doch Strecken geometrische Gebilde, welche ebenfalls unter den Begriff der gerichteten Gröſsen fallen.

Ausserordentlich wichtig wird diese Darstellungsweise bei der Bestimmung einer Resultierenden aus mehreren auf einen Punkt wirkenden Kräften bezw. bei der Zerlegung einer Kraft in mehrere Komponenten mittels des Kräfteparallelogramms.

---

[1]) Anmerkung. Vielfach ist es als unzweckmässig erachtet, wegen der Veränderlichkeit der Gröſse g, — deren Wert auſser von der geographischen Breite, auch von der Höhe des Beobachtungsortes über dem Meeresniveau abhängt, — unter Gewichten Schwerkräfte zu verstehen und nicht Massen, zumal man in den meisten Fällen durch Wägungen nur Massenvergleichungen anstellt. Andererseits werden aber durch die Auffassung des Gewichts als Kraft die Lösungen verschiedener Aufgaben bei Benutzung des Prinzips der Erhaltung der Energie wesentlich vereinfacht. Jedenfalls soll aber durch diese Auffassung keineswegs der Meinung Vorschub geleistet werden, als wäre der Kraftbegriff etwas Fundamentales bei den physikalischen Vorgängen.

Arbeit, Energie.

Der Name dieses Begriffes ist, wie der des Kraftbegriffes, dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entnommen. Allerdings findet man nicht viele menschliche Arbeitsleistungen, welche einfach genug sind, um sie durch das physikalische Mafs vollständig bestimmen zu können. Als für unsern Zweck brauchbares Beispiel einer solchen menschlichen Arbeitsleistung sei die eines bei einem Hochbau beschäftigten Steinträgers gewählt; ist doch seine Thätigkeit durch maschinelle Einrichtungen völlig ersetzbar, also sicher eine ausschliefslich mechanische.

Die Gröfse der von einem solchen Manne geleisteten Arbeit beurteilt man einmal nach dem Gewicht des beförderten Materials, andererseits nach der Höhe, in welche das Material geschafft wird. Man hält die geleistete Arbeit für die n-fache, wenn ein n-faches Gewicht an Steinen ebenso hoch gehoben wird, wie das einfache Gewicht. Denselben n-fachen Wert würde aber auch eine Arbeit haben, welche das einfache Quantum Steine n-mal so hoch befördert, als ein gleich grofses anderes.

Es ist also

$$5)\ E = P.\, s$$

die Formel, welche die Abhängigkeit der Arbeit E angiebt von dem Gewicht P und dem Höhenunterschiede s, welcher durch die Lage des Gewichts vor und nach der Bewegung bestimmt ist.

Oder für P den Wert aus Formel 4. eingesetzt:

$$5^{*})\ E = m\, g\, s.$$

Die Arbeitseinheit würde danach geleistet, wenn eine Masse von der Gewichtseinheit eine Streckeneinheit gehoben würde.

Der Arbeiter selbst wird seine Fähigkeit, eine bestimmte Arbeit zu leisten, taxieren nach der ihm beständig zur Verfügung stehenden Körperkraft, d. h. er wird das n-fache an Material befördern können, falls ihm n-mal soviel Kraft als einem andern zu Gebote steht. Es ist deshalb in Formel 5* das Gewicht ersetzbar durch die zur Hebung des Materials aufgewendete Kraft f, sodafs der Ausdruk für E sich auch in folgender Form schreiben läfst:

$$5^{**})\ E = f.\, s.$$

Die aus dieser Formel sich ergebende Arbeitseinheit wird geleistet, wenn die Krafteinheit ihren Angriffspunkt um die Einheit der Wegstrecke in der Kraftrichtung verschiebt.

Als Dimensionsgleichung ergeben beide für die Arbeit gewonnenen Ausdrücke 5* und 5** gleichmäfsig

$$5^{***})\ (dim\ E) = m\ s^{\ 2}\ t^{\ -2}$$

Ist zu dem Heben eines Gewichtes eine gewisse Arbeit verbraucht, welche durch das Produkt $m\ g\ s$ gemessen wird, so liegt es nahe, zu fragen, wieviel Arbeit kann die gehobene Masse leisten, wenn sie von ihrer gewonnenen Höhe wieder auf das Niveau ihres früheren Ortes herabfällt, oder anders ausgedrückt: wie grofs ist die *potentielle Energie*, der Arbeitsvorrat, den die Masse *m* vermöge ihrer veränderten Lage besitzt?

Die Gröfse der durch eine fallende Masse geleisteten Arbeit ist wie die jeder Arbeit abhängig von der in Thätigkeit tretenden Kraft, d. i. dem Gewichte der Masse $f = mg$ und von dem im Falle zurückgelegten Wege, der Fallhöhe[1]) $s = \frac{1}{2}\, g\, t^2$.

Aus diesen Gröfsen setzt sich nach Formel 5* die von dem *t* Sekunden frei fallenden Körper geleistete Arbeit zusammen zu:

$$E = \frac{1}{2}\ mg^{\ 2}\ t^{\ 2}$$

Wie bei der Besprechung des Kraftbegriffs, ist auch hier die Arbeit erklärt an der in der Mechanik besonders in Frage kommenden Schwerkraft. Doch lassen sich die Formeln verallgemeinern für beliebige Kräfte. Die in der letzt entwickelten Gleichung allein von der Schwerkraft abhängige Gröfse ist g, d. h. die gerade durch die Schwerkraft hervorgerufene Beschleunigung. Eine beliebige andere Kraft würde durch die Beschleunigung $a = \frac{v}{t}$ charakterisiert sein. Durch Substitution dieses allgemeinen Ausdrucks für die Beschleunigung in jene Gleichung verwandelt sich dieselbe in:

$$6.)\ E = \frac{1}{2}\ mv^{\ 2}.$$

Dieser neue für E gewonnene Ausdruck heifst die *kinetische Energie* der mit der Geschwindigkeit v bewegten Masse m.

---

1) Anmerkung. Berechnung der Fallhöhe. Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers wächst von Sekunde zu Sekunde um die Beschleunigungskonstante g, hat also nach t Sekunden die Gröfse gt erlangt. Die mittlere (gleichförmige) Geschwindigkeit, mit welcher ein Körper in gleicher Zeit denselben Weg zurücklegen würde, ist für jede Sekunde $\frac{o + g\ t}{2} = \frac{g\ t}{2}$. Durchläuft ein Körper in jeder Sekunde den Weg $\frac{1}{2}\, g\, t$, so hat derselbe nach t Sekunden den Weg $s = \frac{1}{2}\ g\ t^2$ zurückgelegt.

Führt man diesen Ausdruck auf die Grundmafse zurück, so erhält man in

$$6^*) \ (dim\ E) = m\ s\ ^2\ t\ ^{-2}$$

dieselbe Dimension, welche sich für die zum Heben der Last erforderliche Arbeit ergab.

Schon dieser Umstand weist auf eine nähere Beziehung der beiden Gröfsen zu einander hin, die im Prinzip der Erhaltung der Energie ihren präzisen Ausdruck findet.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie und Anwendungen desselben auf Aufgaben der Mechanik starrer Körper.

Wie durch die chemischen Prozesse die Quantität der einen Körper aufbauenden Substanzen nach dem Prinzip der Erhaltung des Stoffes aus sich selbst weder verringert noch vermehrt werden kann, die Gesamtsumme vielmehr aller im Weltall vorhandenen chemischen Stoffe unveränderlich erhalten bleibt, so kann nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie keine Energie verschwinden, alles scheinbare Verschwinden einer Energie ist vielmehr nur als eine Umwandlung in eine andere Energieform anzusehen.

So setzt sich die schwindende potentielle Energie eines Systems nicht selten vollständig in kinetische um; und umgekehrt läfst sich scheinbar verlorene kinetische Energie vollständig als potentielle wiederfinden.

Wie die Quantität des Stoffes im Weltall eine konstante Gröfse behält, so ist ebenso die Energie des Weltalls konstant.

Die feste Rolle.

Die einfachste, weil mathematisch durchsichtigste, Anwendung findet das Energie-Prinzip bei der Ableitung der Gleichgewichtsbedingung der festen Rolle.

Die Anschauung lehrt, dafs durch die feste Rolle (Fig. 1) sich dann eine Symmetrieebene S legen läfst, wenn Gewicht P und Last Q gleich sind und in einem Niveau liegen. Es ist dann kein Grund ausfindig zu machen, weshalb dieses System sich nicht im Gleichgewicht befinden sollte. Wird nun die Last Q um die Höhe s gehoben, so mufs das Gewicht P um dieselbe Strecke s sinken, da die Länge des gesamten Schnurlaufs unverändert dieselbe bleibt. Die Arbeit, die dazu nötig ist, die Last Q um s zu heben, ist gleich dem Produkte $Q\ s$ (vergl. Seite 15, Formel 5.) Durch diese Lagenänderung der Last hat dieselbe einen Zuwachs an potentieller Energie, (Arbeitsvorrat,) erhalten

von eben der Gröſse $Q\ s$, d. h. würde die Verbindung der Last mit der Rolle gelöst, so könnte die Last durch das Zurückfallen in ihr früheres Niveau die Arbeit $Q\ s$ leisten. Bei dem Heben der Last um die Höhe s ist nun das Gewicht P um s gesunken, hat also an potentieller Energie den Betrag $P\ s$ eingebüsst. Da nun die geringste Kraft — von der Reibung der Rolle wird abgesehen — diese Bewegung bewirken kann, also die von auſsen zugeführte Arbeitsgröſse oder Energie so gut wie Null ist, so muſs die für die Last Q gewonnene potentielle Energie gleich sein dem Energieverlust, welchen das Gewicht P erlitten hat, es muſs also sein nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie:

$$P\ s = Q\ s$$

d. h. also für jede beliebige Stellung von Last und Gewicht herrscht bei der festen Rolle Gleichgewicht, wenn:

$$P = Q.$$

Die Verbindung mehrerer Rollen.

Wird auſser der festen Rolle A (Fig. 2) noch eine bewegliche Rolle B zum Tragen der Last Q verwendet, indem das eine Ende des zusammenhängenden Schnurlaufs im Punkte V befestigt ist, das andere aber von dem Gewichte P über die feste Rolle A gezogen wird und besteht Gleichgewicht, so wird eine Hebung der Last Q (die Rolle einbegriffen) um die Strecke s nur erreicht werden durch gleichzeitiges Verkürzen jedes der beiden die Rolle B tragenden Schnurteile a und b, je um das Stück s. Diese Verkürzung aber wird veranlaſst durch Senkung des Gewichtes P um die Strecke $2\ s$. Die potentielle Energie, welche Q durch die Hebung erlangt hat, ist $E = Qs$, während das Gewicht an potentieller Energie verloren hat den Betrag $E' = P.\ 2s$. Nach dem Energieprinzip muſs nun sein:

$$Q\ s = P.\ 2s.$$

Daraus ergiebt sich als Gleichgewichtsbedingung für dieses Rollensystem:

$$Q = 2\ P$$

Hängt die Last nicht direkt an dieser losen Rolle B, hängt vielmehr an ihr, in gleicher Aufhängung wie sie selbst, wieder eine bewegliche Rolle C (Fig. 3), an der nun erst die Last befestigt ist, so würde, um die Last Q um s zu heben, die Rolle B um $2\ s$ zu verschieben, also das Gewicht P um $4\ s$ zu senken sein. Es wäre dann, das Gewicht der Rollen vernachlässigt, nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie:

$$Q.\ s = P.\ 4\ s$$

oder die Gleichgewichtsbedingung für dieses aus 2 beweglichen und einer festen Rolle bestehende System wäre:

$$Q = 2^2 . P.$$

Bei Verwendung noch einer dritten beweglichen Rolle würde die Gleichgewichtsbedingung sein: $Q = 2^3 P$, bei n-beweglichen Rollen $Q = 2^n P$. (*Potenzflaschenzug.*)

Sind 6 Rollen zu einem sogenannten *gemeinen Flaschenzuge* verbunden (Fig. 4), so mufs, wenn die Last Q um s gehoben werden soll, jeder der 6, die Rollen unter einander verbindenden Schnurteile um s verkürzt werden; da diese Schnurteile aber unter einander als ein Schnurlauf zusammenhängen, so senkt sich bei der Hebung von Q um s das Gewicht P um 6 s. Nach dem Energieprinzip mufs dann sein:

$$Q . s = P . 6 s,$$

woraus als Gleichgewichtsbedingung folgt:

$$Q = 6 P.$$

Das Wellrad.

Zwei konzentrische fest mit einander verbundene Rollen (Fig. 5) mit den verschiedenen Radien $AC = r < BC = R$ werden durch Q und P im Gleichgewichte gehalten, indem Q an dem um die kleinere Rolle geschlungenen Schnurlaufe, P an dem um die gröfsere Rolle befindlichen angebracht ist. Wird Q gehoben um eine gewisse Höhe s, so wird diese Hebung dadurch erzeugt, dafs sich der Schnurlauf bei der Drehung der Rolle um den Centriwinkel α auf den Bogen $b = s$ der kleineren Rolle aufwickelt, dadurch sinkt aber P um eine Strecke S, die gleich dem zu demselben Zentriwinkel α gehörigen, aber auf der grofsen Rolle gelegenen Bogen $b' = S$ ist.

Nach dem Energie-Prinzip mufs nun sein:

$$P . S = Q . s \text{ oder } \frac{P}{Q} = \frac{s}{S}$$

da aber in zwei Kreisen sich zwei zu gleichen Zentriwinkeln gehörige Bogen zu einander verhalten, wie die Radien der Kreise, so nimmt die eben abgeleitete Gleichgewichtsbedingung auch folgende Form an:

$$P : Q = r : R.$$

Der Hebel.

Analog der Behandlung des Wellrades ist die Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen für den ungleicharmigen Hebel bei parallel angreifenden Kräften, indem nur an Stelle ähnlicher Sektoren ähnliche rechtwinklige Dreiecke treten. (Fig. 6). Angenommen, der Hebel AB sei in der horizontalen

Lage EF im Gleichgewichte gewesen, nun aber sei das Gewicht P um HB gesenkt worden, so mufs dadurch die Last Q um die Strecke AG gehoben sein. Nach dem Energie-Prinzip ergiebt sich daraus die Gleichung: $Q.\ AG = P.\ HB$ oder als Proportion geschrieben:

$$P : Q = AG : HB.$$

Da aber $\triangle\ ACG \sim \triangle\ HCB$ ist, so läfst sich diese Proportion ersetzen durch die folgende:

$$P : Q = AC : BC.$$

Für den gleicharmigen Hebel, bei dem $AC = BC$, geht diese Proportion über in die Gleichung:

$$P = Q.$$

Direkte Anwendung findet diese Relation bei der gleicharmigen Balkenwage, das Gesetz des ungleicharmigen Hebels bei der Schnellwage, in nicht ganz so einfacher Weise auch bei der Zeiger- und Brückenwage.

Die *Zeigerwage* (Fig. 7) entspricht einem zweiarmigen Hebel, dessen Arme $A\ C$ und $C\ B$ einen Winkel einschliefsen. Die an den Endpunkten A und B der Arme angreifenden Kräfte P und Q sind parallel, weil lotrecht gerichtet.

Denkt man sich gewöhnlich bei dem geradlinigen, ungleicharmigen Hebel $D\ C\ E$ Gewicht sowohl wie Last direkt in den Endpunkten D und E der Hebelarme angreifend, so hindert doch nichts, sich vorzustellen, dafs beide Gewichte durch je einen gewichtslosen Faden $D\ A$ und $E\ B$, auch von verschiedener Länge, an den Endpunkten des Hebels befestigt sind; die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie würde genau dasselbe Gesetz ergeben, wie es oben schon für den geradlinigen Hebel entwickelt ist. Werden nun aber die Last und das Gewicht mit dem Drehpunkt C des Hebels durch die geraden, unbiegsamen Linien $A\ C$ und $C\ B$ verbunden gedacht, so könnte auch beim Wegfall der ursprünglichen Befestigung sich keine andere Gleichgewichtsbedingung ergeben. Nur würde der Wortlaut des Gesetzes für diese Art Hebel, die bei der Konstruktion der Zeigerwagen Verwendung gefunden hat, folgendermafsen sich ausdrücken lassen: es ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die Produkte gleich sind aus den Gewichten (resp. angreifenden Kräften) und den Abständen der zugehörigen Kraftrichtungen von dem Drehpunkte des Hebels. Diese Produkte heifsen die *statischen Momente* der Kräfte in Bezug auf den Umdrehungspunkt. Dies, in einer Gleichung mit Hilfe der Fig. 7 gegebenen Gröfsen ausgedrückt, wäre:

$$Q.\ CD = P.\ CE.$$

Bei einer *Zeigerwage*, deren Arme rechtwinklig auf einander stehen, trägt nun der eine längere Arm R stets das gleiche Gewicht P. Ist die Wage unbelastet, so wird dieses Gewicht die tiefste Lage einnehmen, welche überhaupt möglich ist, d. h. das konstante Gewicht wird vertikal unter dem Drehpunkte H hängen. Eine Belastung der Wage durch die Last Q_1 am Arme r führt nun eine Drehung der beiden Wagearme herbei je um den Winkel α_1. Nach dem oben abgeleiteten Gesetze heifst dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$P \,.\, R \sin \alpha_1 = Q_1 \,.\, r \cos \alpha_1$$

daraus ergiebt sich für Q_1 der Wert $Q_1 = \frac{P \,.\, R}{r} \tang \alpha_1$

Ergiebt eine andere Last Q_2 den Drehungswinkel α_2, so ist für sie analog der Wert: $Q_2 = \frac{P \,.\, R}{r} \tang \alpha_2$. Daraus folgt die Proportion $Q_1 : Q_2 = \tang \alpha_1 : \tang \alpha_2$,

d. h. es verhalten sich bei der Zeigerwage die gewogenen Lasten zu einander wie die trigonometrischen Tangenten der durch die Lasten hervorgerufenen Drehungswinkel.

Bei der Konstruktion der *Dezimalwage* (resp. Brückenwage) (Fig. 9) ist das Wichtigste nicht das Verhältnis der beiden Hebelarme AB und BC, sondern die sinnreiche Einrichtung, welche der sogenannten Brücke EF nur eine Parallelverschiebung, also stets nur eine horizontale Lage ermöglicht, wie und wo man die Brücke auch belasten mag. Hätte die Dezimalwage diese Eigenschaft nicht, so würde sie trotz des richtigen Verhältnisses der Hebelarme je nach der Stelle, welche die Last auf der Brücke einnähme, das Gewicht desselben Körpers verschieden angeben.

Damit die Brücke EF nur parallel mit sich selbst verschoben werden kann, mufs sowohl Punkt E als Punkt F durch eine Belastung der Brücke gleichzeitig um die gleiche Strecke gesenkt werden.

Senkt sich C bis C', so sinkt E bis E'. Gleichzeitig hat sich D nach D', G nach G' bewegt. F soll sich nun um dieselbe Gröfse EE' bis F' senken, dazu ist nötig, dafs sich H nach H' bewegt und $HH' = EE'$ ist. Dies letzte kann aber nur dann der Fall sein, wenn

$$GJ : HJ = BD : BC;$$

denn $\frac{GJ}{HJ} = \frac{GG'}{HH'}$ und $\frac{BD}{BC} = \frac{DD'}{CC'}$ also folgt aus der Annahme obiger Proportion: $\frac{GG'}{HH'} = \frac{DD'}{CC'}$, da nun $DD' = GG'$ ist, so mufs auch $HH' = CC'$ sein.

Das Verhältnis $AB : BC$ bestimmt dann nur, ob man es mit einer Dezimal- oder vielleicht Centesimalwage zu thun hat. Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie verbraucht nämlich die Last Q die Energie $Q.\ EE'$, während das in A angreifend gedachte Gewicht P die gleich grofse potentielle Energie $P.\ AA'$ gewinnen mufs, also

$$Q.\ EE' = P.\ AA'$$

oder da $EE' = CC'$ und $\frac{AA'}{CC'} = \frac{AB}{AC}$, so ist auch:

$$\frac{Q}{P} = \frac{AB}{BC}.$$

Der Schwerpunkt.

Denkt man sich einen geradlinigen Hebel AB mit angreifender Last Q und Gewicht P im Gleichgewicht in seinem Unterstützungspunkte C so aufgehängt, dafs ein über eine feste Rolle F laufendes Gewicht G dem Hebel mitsamt anhängender Last und Gewicht das Gleichgewicht hält (Fig. 10), so läfst sich an dieser Vorrichtung erkennen, wie zwei parallel und gleich gerichtete Kräfte, welche an ein festes System angreifen, sich zu einer dritten Kraft vereinigen.

Denkt man das Gewicht G gesenkt um s, so mufs sowohl P als Q um s gehoben werden, ohne dafs das Gleichgewicht gestört wäre. Nach dem Energie-Prinzip ist dann: $Gs = Ps + Qs$ oder

$$G = P + Q.$$

Wenn sich stets je zwei solcher parallel und gleichgerichteter Kräfte durch eine Kraft ersetzen lassen, so folgt, dafs sich beliebig viele parallele und gleichgerichtete an Massenteilchen eines Körpers angreifende Kräfte ersetzen lassen durch eine einzige in einem Punkte des Körpers angreifend gedachte Resultierende. Dieser Fall wird besonders wichtig für die Schwerkraft. Der Punkt, an welchem die Resultierende angreifend gedacht werden mufs, heifst der Schwerpunkt des Körpers.

Ein Körper, in diesem seinem Schwerpunkte unterstützt gedacht, ist damit jeder weiteren Einwirkung der Schwerkraft entzogen und müfste in jeder beliebigen, nur durch Drehung um den unterstützten Schwerpunkt gewonnenen Lage im Gleichgewicht sein. Bei jeder derartigen Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt wird genau soviel potentielle Energie gewonnen, als an kinetischer verbraucht wird. Man sagt, ein derartig unterstützter Körper befinde sich in *indifferentem Gleichgewichte.*

Wird ein Körper nicht in seinem Schwerpunkte unterstützt, sondern in irgend einem andern Punkte, so kann man den Schwerpunkt um den Unterstützungspunkt gedreht denken. Den höchsten Betrag an potentieller Energie erhält der Körper dann, wenn der Schwerpunkt sich vertikal über dem Unterstützungspunkte befindet. Der Körper befindet sich in *labilem Gleichgewichte*; nur ein wenig aus dieser Lage verschoben, wird der Körper aus eigenem Antriebe nicht wieder in diese Lage zurückkehren, vielmehr wird sich die potentielle Energie völlig in kinetische verwandeln. Nach Einnahme der neuen Ruhelage wird dann der Schwerpunkt vertikal unter dem Unterstützungspunkte zu suchen sein. Der Körper selbst befindet sich in *stabilem Gleichgewichte*. Jede Drehung aus dieser Ruhelage würde dem Schwerpunkte des Körpers eine gewisse potentielle Energie erteilen, die in kinetische sich umsetzend, den Körper in pendelnde Bewegung versetzen würde.

Handelt es sich nun bei einem mechanischen Probleme nur um die Untersuchung einer fortschreitenden Bewegung, so hat man nur nötig, die Bewegung des Schwerpunktes des betr. Körpers zu untersuchen. Auf diese Weise vereinfachen sich wesentlich die Untersuchungen z. B. der Fall- und Wurfgesetze, die Gesetze der Centralbewegung u. s. w.

Die Fallgesetze.

1. Fallgesetz. Der Fall eines Körpers, vor sich gehend gedacht im luftleeren Raume, wird bewirkt durch die dauernd angreifende Anziehungskraft der Erde. Diese Kraft, wie jede, ist proportional der Masse des Körpers und der ihm erteilten Beschleunigung (vergl. Seite 11, Formel 3). Setzt man die von der Erdanziehungskraft abhängige Beschleunigung $= g$, so ist der Wert der wirkenden Kraft:

$$f = mg$$

Andererseits ist aber ganz allgemein der Wert einer jeden auf die Masse m wirkenden Kraft:

$f = \frac{m\,v}{t}$, folglich mufs die Gleichung bestehen:

$$\frac{m\,v}{t} = mg.$$

Da aus dieser Gleichung die Masse m ausfällt, so zeigt dies augenfällig — und das ist der Grund dieser Ableitung — dafs nach dem *ersten Fallgesetze:*

$$v = g\,t$$

die Geschwindigkeit unabhängig ist von der Masse des fallenden Körpers, dafs also, wie in der evacuierbaren Fall-

röhre gezeigt wird, eine Bleikugel im luftleeren Raume ebenso schnell fällt als eine Flaumfeder.

2. Fallgesetz. Der Körper von dem Gewichte mg, welcher die Höhe s herabgefallen ist, besafs vor dem Falle die potentielle Energie mgs (Seite 13, Formel 5*). Diese hat er fallend vollständig in kinetische Energie verwandelt, deren Gröfse $\frac{1}{2}mv^2$ (Seite 14 Formel 6) ist. Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie mufs nun sein $mgs = \frac{1}{2}mv^2$, also

$$v^2 = 2gs \text{ oder}$$

$$2\text{a}) \quad v = \sqrt{2gs}$$

Nach dem ersten Fallgesetze war nun andererseits für dieselbe Endgeschwindigkeit v die Gleichung gefunden:

$$v = gt$$

sodafs also nun die Gleichung resultiert:

$$gt = \sqrt{2gs}$$

Aus dieser berechnet sich der Wert für die Fallhöhe s:

$$2\text{b}) \quad s = \frac{1}{2}gt^2$$

Auch dieses Gesetz, welches über die durchfallenen Räume Aufschlufs giebt, enthält die Masse m nicht, gilt also für alle Massen in gleicher Weise.

Fallmaschine. Geprüft und anschaulich gemacht werden die Fallgesetze z. B. durch die *Atwoodsche Fallmaschine.* (Hierzu Fig. 11.)

Sie besteht im wesentlichen aus einer möglichst reibungslos laufenden festen Rolle A, mittels deren sich zwei gleiche Massen m und m' das Gleichgewicht halten. Ein kleines Uebergewicht Δm der einen Masse hinzugefügt, stört das Gleichgewicht und läfst die um Δm vermehrte Masse m sinken. Fällt nun die Masse $m + \Delta m$ um s, so wird dadurch an potentieller Energie verbraucht $(m + \Delta m) g . s$. Durch das Sinken von $m + \Delta m$ wird aber auf der andern Seite die nicht mit dem Uebergewichte versehene Masse m um die Strecke s gehoben, also an potentieller Energie der Betrag mgs wiedergewonnen. Der reine Verlust an potentieller Energie beziffert sich demnach auf Δmgs. Die erzeugte kinetische Energie beträgt auf der stärker belasteten Seite $\frac{1}{2}(m + \Delta m) v^2$, auf der andern nur $\frac{1}{2}mv^2$. Die Gesamtsumme der erzeugten kinetischen Energieen kann aber nur von der wirklich verschwundenen potentiellen Energie herstammen, also mufs die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(m + \Delta m)\, v^2 = \Delta mgs.$$

Hieraus berechnet sich für v der Wert:

$$\sqrt{2gs\frac{\Delta m}{2m+\Delta m}}$$

Vergleicht man die bei freiem Fall von der Masse m erlangte Geschwindigkeit $v' = \sqrt{2gs}$ (siehe Fallgesetz 2^a Seite 22) mit der Geschwindigkeit v, welche das Uebergewicht Δm an der Fallmaschine der Masse m erteilte, so ergiebt sich die Proportion:

$$\frac{v'}{v} = \frac{\sqrt{2gs}}{\sqrt{2gs\frac{\Delta m}{2m+\Delta m}}} \text{ oder}$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta m}{2m+\Delta m}}} = \frac{\sqrt{2m+\Delta m}}{\sqrt{\Delta m}}$$

Die Wurfgesetze.

Der *Wurf senkrecht aufwärts* ist in gewisser Beziehung die Umkehrung des freien Falles. Während der fallende Körper seine gesamte potentielle Energie umsetzt in kinetische, so mufs dem senkrecht aufwärts geworfenen Körper eine gewisse kinetische Energie erteilt werden, die der Körper aufsteigend allmählich vollständig in potentielle verwandelt. Es mufs demnach, wenn v die dem Körper erteilte Anfangsgeschwindigkeit ist, eine Gleichung bestehen zwischen der erteilten kinetischen Energie einerseits und der aus ihr entstandenen potentiellen Energie andererseits, welche der Körper in dem Momente besitzt, wenn er die gröfste Höhe h erreicht hat. Die Gleichung lautet:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh.$$

Daraus ergiebt sich für die Höhe der höchsten Erhebung des senkrecht geworfenen Körpers über sein ursprüngliches Niveau:

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

Für den *schiefen Wurf*, welcher unter dem Winkel α gegen die Horizontalebene x (Fig. 12) gerichtet ist, zerlegt sich die dem Körper erteilte Anfangsgeschwindigkeit v nach dem Satze von dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten in eine Vertikalkomponente $v_h = v \sin \alpha$ und eine Horizontalkomponente $v_l = v \cos \alpha$, d. h. es würde in senkrechtem Wurfe ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v \sin \alpha$ dieselbe Höhe H als höchste Erhebung über der Horizontalebene erreichen, welche der unter dem Winkel α mit der

Anfangsgeschwindigkeit v geschleuderte Körper erreicht. Der Wert für die Höhe berechnet sich daher aus der für den senkrecht aufwärts gerichteten Wurf geltenden Gleichung $h = \frac{v^2}{2g}$. dadurch, dafs v ersetzt wird durch $v \sin \alpha$. Die höchste Erhebung H des Geschosses bei schiefem Wurf ist also:

$$H = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Während der Zeit, welche der Körper gebraucht, um diese Höhe und damit den gröfsten Wert der Energie der Lage zu erreichen und diesen wiederum umzusetzen in kinetische Energie, macht auch die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit ihren Einflufs geltend. Diese Zeit soll zunächst berechnet werden.

Nach dem 2ten Fallgesetze ist $H = \frac{1}{2} g t^2$; dieser Wert für H wird mit dem soeben abgeleiteten $H = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ zu der Gleichung vereinigt:

$$\frac{1}{2} g t^2 = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Hieraus ergiebt sich als Mafs für den Zeitraum t, in welchem der geworfene Körper die Höhe H erreicht:

$$t = \frac{v \sin \alpha}{g}$$

Genau so lange Zeit t gebraucht der Körper, um von seiner höchsten Erhebung H wieder auf das Ausgangsniveau herab zu fallen. Während der Zeit $2t$ des Steigens und Fallens wirkt die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit $c = v \cos \alpha$; es wird daher die Entfernung s der Abschufsstelle von der Einschlagsstelle, beide in derselben Horizontalebene gelegen, (nach der Formel $s = ct$) gemessen werden durch die Gleichung:

$$s = v \cos \alpha . \frac{2 v \sin \alpha}{g} \text{ oder}$$

$$s = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

Von dem Einflusse des Luftwiderstandes ist selbstredend bei allen diesen Rechnungen abgesehen.

Der Fall auf vorgeschriebener Bahn.

Durchfällt ein Körper, dessen Gewicht $= mg$ auf der beliebig gestalteten Bahn AB (Fig. 13a) die Strecke $s = CD$, so hat der Körper an potentieller Energie eingebüfst den Betrag:

$$E = mg \cdot CE.$$

CD klein genug genommen, ist $CE = CD \cos\alpha$, wenn α der Winkel ist, welchen die Bahnrichtung in C mit CE macht, dem Abstande des Punktes C von dem Horizontalniveau des Punktes D. Der Verlust also an potentieller Energie beträgt für die Fallstrecke $CD = s$:

$$E = mg \cdot s \cos\alpha.$$

Denkt man sich andererseits die in C (Fig. 13b) in der Richtung EC angreifende Kraft $CJ = mg$ zerlegt in zwei Komponenten, von denen die eine CF in der Richtung der Bahn, die andere CG senkrecht dazu wirkt, so verschwindet von diesen beiden Komponenten CG völlig, indem sie durch den Widerstand der unbeschränkt fest zu denkenden Bahn aufgehoben wird, während die in der Richtung der Bahn wirkende Komponente CF den Wert erhält: $CF = mg \cos\alpha$. Diese in der Richtung des Bahnelementes $s = CD$ wirkende Kraftkomponente leistet nun durch Verschiebung ihres Angriffspunktes von C nach D die Arbeit:

$$E = mg \cos\alpha \cdot s.$$

Durchfällt nun der betrachtete Körper sämtliche Bahnelemente, so setzt sich die dadurch gewonnene Arbeitsgröfse mgh zusammen aus den in den einzelnen Bahnelementen frei werdenden Mengen potentieller Energie. Die Verwandlung dieses Quantums potentieller Energie in kinetische ist beendet in B, dem tiefsten Punkte der Bahn. Dieselbe kinetische Energie, wie im Punkte B dieser beliebig gewählten Bahn, würde der Körper auch in freiem Falle erlangt haben, wenn er von A ausgehend das Niveau von B im Punkte T erreicht hätte. Ist aber die in B wie in T erreichte kinetische Energie dieselbe, also $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v'^2$, so folgt daraus auch die Gleichheit der in B und in T erlangten Geschwindigkeiten v und v'. Danach ist es für die Endgeschwindigkeit eines Körpers gleichgültig, welche Bahn ein Körper durchläuft, wenn nur die Niveaudifferenzen von Anfang und Ende der Bahnen dieselben sind.

Anwendung findet dieser Satz u. a. bei der schiefen Ebene und beim Pendel.

Die schiefe Ebene. Auf einer den Winkel α mit der Horizontalebene bildenden Ebene wird einer Last Q das Gleichgewicht gehalten durch eine Kraft P, welche parallel

der schiefen Ebene an Q angreift. (Fig. 14.) Eine Verschiebung von Q um die Strecke l' wird bewirkt durch die Arbeit $P.\ l'$. Dadurch vermehrt sich die potentielle Energie der Last Q um $Q\,h'$. Nach dem Energie-Prinzip mufs nun sein:

$$P\,l' = Q\,h' \text{ oder } \frac{P}{Q} = \frac{h'}{l'}.$$

Da nun $\frac{h'}{l'} = \frac{BC}{AB}$, so folgt als Gleichgewichtsbedingung, wenn $B\,C$ durch h, $A\,B$ durch l ersetzt wird:

$$P : Q = h : l.$$

Diese Gleichgewichtsbedingung kann nun auch, da $h : l = sin\alpha$, ersetzt werden durch:

$$\frac{P}{Q} = sin\alpha.$$

Greift eine Kraft P' parallel der Breite der schiefen Ebene $A\,C = b$ an die Last Q an, so dafs P' und Q sich im Gleichgewicht befinden, so ist zu einer Verschiebung der Last Q um die Strecke l' die Arbeit $P'.b'$ erforderlich. Die potentielle Energie von Q wird dadurch gesteigert um den Betrag $Q.\ h'$. Nach dem Princip der Erhaltung der Energie besteht dann die Gleichung: $P'\,b' = Q\,h'$ oder $P' : Q = h' : b'$. Da nun $\frac{h'}{b'} = \frac{h}{b}$, so ergiebt sich die Gleichgewichtsbedingung: $P' : Q = h : b$.

Das Verhältnis $\frac{h}{b}$ ist aber lediglich abhängig von dem Neigungswinkel α der schiefen Ebene, dessen trigonometrische Tangente mit $\frac{h}{b}$ identisch ist. Danach formt sich die Gleichgewichtsbedingung auch um in:

$$\frac{P'}{Q} = tang\,\alpha.$$

Bildet die an Q angreifende Kraft P mit der schiefen Ebene einen Winkel β (Fig. 15), so kommt von ihr als Zugkraft nur $P\,cos\,\beta$ zur Geltung, während der übrige Teil der Kraft die Druckwirkung der Last auf die schiefe Ebene verringert. Mit Hilfe des Kräfteparallelogramms kann man nämlich die Kraft P in zwei Kompenenten zerlegt denken, von denen die eine in der Richtung der schiefen Ebene, die andere senkrecht zu ihr wirkt. Nach dem Principe von der Erhaltung der Energie ist dann die von der Kraft P durch Verschiebung der Last Q um die Strecke s geleistete

Arbeit gleich der durch Hebung der Last Q gewonnenen potentiellen Energie. In Form einer Gleichung also:

$$P \cos\beta . s = Q . s \sin\alpha.$$

Rollt ein Körper vermöge seiner eigenen Schwere auf einer schiefen Ebene von der Höhe h herunter, so verwandelt er beim Herabrollen seine gesamte potentielle Energie allmählich in kinetische. (Siehe den Fall auf vorgeschriebener Bahn, Seite 25.) Es ist also:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h.$$

Hieraus ergiebt sich für die erlangte Endgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2 g h}$$

Die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher dieser Körper die gesamte Länge l der schiefen Ebene zurücklegt, ist also: $\frac{o + v}{2} = \frac{v}{2} = \frac{l}{t}$. Hieraus berechnet sich die Zeit t, welche zum Herabrollen gebraucht wird, als:

$$t = \frac{2 l}{v} = \frac{2 l}{\sqrt{2 g h}}.$$

Die Schraube. Denkt man sich ein rechtwinkliges Dreieck so auf einen geraden Cylinder gewickelt, dafs die eine Kathete den Grundkreis des Cylinders bildet, so nimmt die Hypotenuse die Lage eines Schraubenganges an, dessen Ganghöhe durch die andere Kathete gegeben wird.

Eine Schraubenspindel (Fig. 16) werde durch das Gewicht P um ihre vertikale Achse $A B$ gedreht mittels einer über eine feste Rolle C laufenden Schnur, die in der in der Figur angedeuteten Weise um den die Schraube tragenden Cylinder geschlungen ist. Durch Umdrehung der Schraubenspindel wird die Schraubenmutter Q ohne eigene Drehung parallel mit sich selbst verschoben, da sie durch die Leitstange $E F$ verhindert ist, der drehenden Bewegung der Schraube zu folgen. Wäre diese Leitstange nicht vorhanden, so würde, der Mangel jeglicher Reibung vorausgesetzt, die Schraubenmutter in drehender Bewegung auf den Sraubenwindungen heruntergleiten.

Um nun die Schraubenmutter vom Gewichte Q um eine Ganghöhe h zu heben, mufs sich die Schraubenspindel vom Radius r einmal um sich selbst drehen, also das Gewicht P, welches dem Drucke der Schraubenmutter das Gleichgewicht hält, um die Strecke $s = 2 r \pi$ sinken. Dabei wird der Verlust an potentieller Energie im Betrage von $P. 2 r \pi$ ausgeglichen durch den Zuwachs an potentieller Energie $Q . h$, welchen die Last Q erfährt. Das Prinzip

der Erhaltung der Energie ergiebt also als Gleichung in diesem Falle:

$$2r\pi . P = Q . h \text{ oder}$$
$$P : Q = h : 2r\pi,$$

d. h. bei der Schraube halten sich Kraft und Last dann das Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie die Ganghöhe der Schraube zu dem Umfange der Schraubenspindel.

Diese Gleichgewichtsbedingung ist durchaus ähnlich der bei der schiefen Ebene für den Fall abgeleiteten, dafs die angreifende Kraft parallel der Breite der schiefen Ebene angreift. Tritt doch nur an Stelle des Umfangs der Schraubenspindel die Breite der schiefen Ebene.

In der That lassen sich kurze auf einander gleitende Strecken einer Schraube und der dazu gehörigen Schraubenmutter stets auffassen als zwei mit ihren Längsflächen auf einander gleitende, kongruente schiefe Ebenen (Fig. 17), deren Neigungswinkel Conplementswinkel sind zu dem Winkel, den die Schraubenlinie mit der Schraubenachse macht, deren Höhen parallel und deren Breiten senkrecht zur Achse der Schraube verlaufen.

Die Anwendung der Gesetze vom Fall auf vorgeschriebener Bahn ergeben ebenfalls analoge Resultate für die Schraube, wie sie für die schiefe Ebene abgeleitet wurden. Auch hier ist die Endgeschwindigkeit eines Körpers, der auf einer Schraube die Niveaudifferenz h durchfällt, $v = \sqrt{2gh}$ und die Fallzeit $t = \frac{2l}{\sqrt{2gh}}$, wobei l die Länge der durchfallenen Schraubenwindung bedeutet.

Der Keil. Wird durch eine auf den Rücken des Keils (Fig. 18) wirkende Kraft P der Keil um die Strecke h verschoben, so werden dabei die zu den Seiten des Keils senkrecht zu denkenden Widerstandskräfte Q überwunden und ihre Angriffspunkte verlegt um die Strecke $GF = e$. Halten sich die Kräfte P und Q das Gleichgewicht, so mufs nach dem Energieprinzip die verbrauchte gleich der gewonnenen potentiellen Energie sein, d. i.

$$P . h = 2 Q . e$$

Da nun $\triangle FGE \sim \triangle ADC$ und $EF = h$, so ist der Wert für e zu entnehmen der Proportion: $e : h = AD : AC$ also $e = \frac{h . AD}{AC.}$. Dieser Wert eingesetzt, giebt der Gleichgewichtsbedingung folgende Gestalt:

$$P.h = 2Q.h\frac{AD}{AC} \text{ oder}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{2AD}{AC} = \frac{AB}{AC}$$

in Worten: die auf einen Keil wirkenden Kräfte halten sich dann das Gleichgewicht, wenn die auf den Rücken des Keils wirkende Kraft sich zu einer der auf die Seiten des Keils wirkenden Kraft verhält, wie der Rücken des Keils zu der Seite des Keils.

Eine andere Ableitung dieser Gleichgewichtsbedingung durch das Energieprinzip, unter Zuhilfenahme der Kräftezerlegung mittels des Parallelogramms der Kräfte wäre folgende: Man denkt sich (Figur 19) die senkrecht zu den Seiten des Keils wirkenden Kräfte Q zerlegt in je zwei Komponenten parallel der Höhe bezw. dem Rücken des Keils. Es können dann für die Bewegung des Keils nur die Kraftkomponenten in Betracht kommen, welche parallel der Höhe wirken, während die dazu senkrechten sich gegenseitig aufheben, weil sie gleich und entgegengesetzt gerichtet sind.

Da nun $\triangle EFG \sim \triangle DBC$, so besteht die Proportion:

$$CF : Q = DB : BC$$

$$\text{also } CF = \frac{Q.DB}{BC.}$$

Wird nun der Keil in dem widerstehenden Mittel um h verschoben, so muſs die verlorene gleich der gewonnenen Energie sein:

$$Ph = 2EF.h \text{ oder } Ph = \frac{2Q.DB}{BC}h., \text{ also}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{2DB}{BC.} = \frac{AB}{BC}.$$

Das Pendel. Das hier zu untersuchende Pendel (das mathematische) hat man sich bestehend zu denken aus einem an einen schwerlosen Faden aufgehängten Massenpunkte. Dieses Pendel befindet sich in der Ruhelage, wenn der Faden, durch das Gewicht des Massenpunktes gespannt, lotrecht hängt. Wird nun der Massenpunkt, bei gespannt bleibendem Faden, aus dieser Ruhelage entfernt, so ist er gezwungen, sich auf einem Kreise zu bewegen. Denkt man sich die kreisförmige Bahn in so viele Bogen zerlegt, daſs man die einzelnen als gerade Linien ansehen kann und den Massenpunkt in irgend einem Punkte der Bahn sich selbst überlassen, so wird derselbe die potentielle Energie, welche

er gerade besitzt, in kinetische umsetzen, indem er die Teile des Kreisbogens nach einander durchfällt und dabei seinen Energiezustand nach den Gesetzen der schiefen Ebene ändert.

Die Anschauung lehrt, dafs der fallende Massenpunkt mit wachsender Geschwindigkeit seine Bahn durcheilt, bringt er doch die Geschwindigkeit, die er auf dem einen Bogenteilchen, der einen schiefen Ebene, erhalten, mit auf die nächste, auf dieser wieder einen Geschwindigkeitzuwachs erhaltend. Da aber die Neigungswinkel der nacheinander zu passierenden Ebenen stets flacher werden, so mufs der Zuwachs der kinetischen Energie zu Beginn der Schwingung ein gröfserer sein als an jeder folgenden Stelle, bis er endlich beim Passieren der Ruhelage, bei gänzlicher Erschöpfung des Vorrates an potentieller Energie, gleich Null geworden ist.

Von dieser Aenderung des Neigungswinkels der schiefen Ebene ist ferner die Gröfse der den Massenpunkt beschleunigenden Kraft (vergl. Anmerkung) in der Weise abhängig, dafs sie an jeder Stelle des Schwingungsbogens proportional ist der jedesmaligen Entfernung des schwingenden Massenpunktes von der Ruhelage des Pendels.

Nach dem Passieren der Ruhelage beginnt die Umkehrung der Erscheinung. Das Pendel, in derselben Richtung weiter schwingend, verbraucht die vorhandene kinetische Energie, jeden Augenblick an potentieller Energie so viel gewinnend, als an kinetischer eingebüfst wird. Ist die gesamte kinetische Energie wieder in potentielle umgewandelt, so ist der Umkehrpunkt erreicht und mit der Rückschwingung beginnt wieder die Rückverwandlung der Energie in kinetische. Die Bewegung des Pendels würde nie aufhören, wenn nicht Reibung und Luftwiderstand derselben ein Ziel setzten.

In welchem Verhältnis der Wert der kinetischen Energie, und damit der Geschwindigkeit des Pendels beim

Anmerkung. Die zur Wirkung gelangende Kraftkomponente ist ein Teil der Erdanziehung, welche in der Richtung derjenigen Tangente der Bahn wirkt, in deren Berührungspunkte der betreffende Pendel-Massenpunkt sich gerade befindet. Wird in Figur 20 die Anziehungskraft der Erde durch die Strecke BC'' graphisch dargestellt, so läfst diese sich zerlegen in die beiden aufeinander senkrecht stehenden Kraftkomponenten BD' und BE'. Während die Komponente BE' den Pendelfaden CB zu spannen hat und durch die Widerstandskraft desselben aufgehoben wird, ist BD' die für die Bewegung allein in Frage kommende Komponente. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CDB und $C''D'B$ folgt die Proportionalität von BD, der Entfernung des Pendelmassenpunkts B von der Ruhelage des Pendels CA, und der Kraftkomponente BD', welche die Bewegungsart des Punktes B bestimmt.

Passieren der Ruhelage steht zu Pendellänge und Ausschlagswinkel, läfst sich ermitteln mit Zuhilfenahme der für die Bewegung auf vorgeschriebener Bahn abgeleiteten Formeln (vergl. Seite 25).

Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie besteht zunächst die Gleichung:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g h.,$$

wobei $h = AD$ (Fig. 20) die Erhebung des Massenpunktes B über das Niveau seiner Stellung in der Ruhelage bei dem Ausschlagswinkel $\alpha = ABC$ und der Pendellänge $CB = l$ angeben soll.

Durch trigonometrische Rechnung ergiebt sich aus der Figur:

$$h = 2 l \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

daraus durch Einsetzen in die Gleichung $\frac{1}{2} m v^2 = m g h$:

$$v^2 = 4 g l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$v = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{lg.}$$

Bei Annahme genügend kleiner Ausschlagswinkel können die Winkel selbst an Stelle der *sinus*-Werte dieser Winkel gesetzt werden, danach würde unter dieser Annahme die vorige Gleichung übergehen in:

$$v = \alpha \sqrt{lg},$$

d. h. bei genügend kleinem Ausschlagswinkel ist die Geschwindigkeit, mit welcher die Ruhelage des Pendels passiert wird, proportional dem Ausschlagswinkel.

Schwingungsdauer eines Pendels.

Die mit den zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln vorzunehmende Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels [1]) bedient sich des mit Hilfe des Energie-Prinzips abgeleiteten Wertes der Maximalgeschwindigkeit eines Pendels $v = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{lg.}$ Die Berechnung der Schwingungsdauer wird aber hier nur möglich durch die vereinfachende, allerdings nur annäherungsweise richtige, Annahme, dass die Bahn des schwingenden Massenpunktes des Pendels ersetzt werden dürfe durch die Sehne desjenigen Kreisbogens, den der Massenpunkt des Pendels in Wirklichkeit durchläuft.

---

[1]) In dem 1893 erschienenen Lehrbuche der Experimentalphysik von Herrn Professor Warburg wird das Abhängigkeitsverhältnis der Schwingungsdauer von der Pendellänge in No. 94, da eine vollständige Berechnung mit elementaren Mitteln unmöglich ist, „ohne Beweis mitgeteilt.“

Es bewegt sich alsdann der schwingende Punkt in dieser geraden Linie so, als wäre er in jedem Augenblicke die rechtwinklige Projektion eines Punktes, welcher mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v einen Kreis durchläuft, dessen Durchmesser gleich ist dem als gerade Linie angenommenen Wege des schwingenden Pendelmassenpunktes. [1])

[1]) Es folge hier der Nachweis, (vergl. § 38 in Trappes Schulphysik, bearbeitet von Prof. Kindel 1893) dafs der beliebige Punkt E resp. D (Fig. 21) als Pendelmassenpunkt des um C schwingenden Pendels $CA = l$ dieselbe Geschwindigkeit besitzt, wie wenn er, als Projektion des mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf dem Halbkreise AHB laufenden Punktes F betrachtet, der Bewegung des Punktes F folgt.

Die Geschwindigkeit v' des Pendelmassenpunktes im Punkte D resp. E ist:

$$v' = \sqrt{2g \cdot ED.}$$

Da nun $ED \cdot EG = AE \cdot EB$
und $AE \cdot EB = EF^2$,
so mufs sein: $ED\ EG = EF^2$,

$$\text{also } v' = \sqrt{2g \frac{EF^2}{EG}} = EF \sqrt{\frac{2g}{EG.}}$$

Weil EG für den angenommenen Fall des Zusammenfallens von Bogen AB und Sehne AB sowie für den Fall eines sehr kleinen Ausschlagswinkels des Pendels den Wert der doppelten Pendellänge $2AC = 2l$ annimmt, so folgt:

$$v' = EF \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Analog wird sich für Punkt M ergeben:

$$v = MH \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Es verhält sich also

$$v : v' = MH \sqrt{\frac{g}{l}} : EF \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Mit dieser so für den Pendelmassenpunkt für die einzelnen Momente seiner Bewegung abgeleiteten Geschwindigkeit soll nun die Geschwindigkeit des Punktes E verglichen werden, der sich als Projektion des Punktes F auf der Sehne AB bewegt.

Punkt F bewegt sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v = MH \sqrt{\frac{g}{l}}$ von F nach F' einem so nahe gelegenen Punkte, dafs der Bogen FF' als gerade Linie angesehen werden kann. Gleichzeitig mufs der Punkt E sich nach E' bewegen.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke FEM und FJF' folgt dann:

$FF' : FJ = MF : EF$ oder
$v : v' = MH : EF$, d. i.

$$v' = v \cdot \frac{EF}{MH} \text{ oder, da } v = MH \sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$v' = EF \sqrt{\frac{g}{l}},$$

Damit ist nachgewiesen, dafs E als Massenpunkt des Pendels dieselbe Geschwindigkeit in jedem Momente seiner Bewegung hat.

Die Peripherie dieses Halbkreises ist $s = l \sin \alpha \pi$

Ist die gleichförmige Geschwindigkeit c, mit der die Peripherie durchlaufen gedacht wird, gleich der Maximalgeschwindigkeit v des Pendelmassenpunktes also:

$$c = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{l g},$$

dann mufs die zum Durchlaufen nötige Zeit sein

$$t = \frac{s}{c} = \frac{l \sin \alpha \pi}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{l g}}$$

Der Ersatz des Kreisbogens AB durch die gleichnamige und zugehörige Sehne ist aber nur dann erlaubt, wenn α ein sehr kleiner Winkel ist, der es zuläfst, dafs sein *sinus* durch den Winkel selbst ersetzt wird. Die dadurch vereinfachte Formel für die Schwingungsdauer lautet dann:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Die Bewegung im Kreise.[1])

Bewegt sich ein Punkt, dessen Masse m ist, mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v auf einer Kreisperipherie, so besitzt der Punkt die kinetische Energie $E = \frac{1}{2} m v^2$.

Sobald für den Punkt M in irgend einem Punkte B der Kreisperipherie (Fig. 22) der Zwang aufhörte, aus dem die Kreisbewegung folgt, so würde der Massenpunkt in der Richtung der Tangente BC mit der während der ganzen Kreisbewegung beibehaltenen, also auch in B vorhandenen, gleichförmigen Geschwindigkeit weiter gehen und auf der Tangente eine Strecke BC in dem Zeitintervall τ zurücklegen, wenn in der Kreisperipherie in dem vorhergehenden gleichen Zeitintervall τ die Strecke $AB = BC$ durchlaufen ist.

In Wirklichkeit gelangt nun der betrachtete Massenpunkt von B nicht nach C, sondern nach D. Dies ist aber nur dann möglich, wenn sich die Geschwindigkeit BC mit

---

welche ein Punkt haben würde, der als rechtwinklige Projektion von F auf den Durchmesser AB betrachtet der gleichförmigen Bewegung des Punktes J auf der Kreisperipherie folgt.

[1]) Januschke, das Princip der Erhaltung der Energie als Grundlage der elementaren Dynamik. (Seite 25 ff.)

einer anderen Geschwindigkeit $BE = CD$ zu BD als der Resultierenden vereinigt nach dem Gesetze vom Parallelogramme der Geschwindigkeiten.

Nach dem Prinzip der Erhaltung der Energie mufs nun die Arbeit, welche dazu nötig ist, den Massenpunkt von B nach E zu befördern, gleich sein dem Teile der kinetischen Energie, welcher dem Massenpunkte durch die Geschwindigkeitskomponente BE allein erteilt wird, d. h. es mufs sein:

$$f . BE = \frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \alpha .$$

Als Teil des Radius OB aufgefafst, ist einerseits

$$BE = r - r \cos \alpha$$

Als Geschwindigkeitskomponente andererseits ist

$$BE = v \sin \alpha .$$

Dafs $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BOD$, folgt aus der Aehnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke CBD und BOD, in welchen $\sphericalangle OBD$ und $\sphericalangle BDC$ als Wechselwinkel gleich sind.

Die obige Gleichung $f . BE = \frac{1}{2} m v^2 \sin^2 \alpha$ formt sich daher um in: $f r (1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} m v^2 (1 - \cos^2 \alpha)$, daraus:

$$f = \frac{\frac{1}{2} m v^2 (1 + \cos \alpha)}{r} ;$$

endlich für den Fall des Ueberganges von der Bewegung auf dem Polygon zur Bewegung im Kreise wird $\alpha = o$, also ist in

$$f = \frac{m v^2}{r}$$

der Ausdruck für die Kraft gefunden, welche die geradlinige Bewegung in die Kreisbewegung verwandelt. Man nennt diese Kraft in hergebrachter Weise Centrifugalkraft.

In ähnlicher und zwar ebenso einfacher Weise lassen sich die Gesetze des Stofses elastischer und unelastischer Körper behandeln und eine grofse Anzahl hydro- und aeromechanischer Probleme werden mit elementaren Mitteln ohne complizierte Rechnungen lösbar.

Wichtig ist es, dafs dabei das absolute Mafssystem[1] fortwährend und ausschliefslich zur Benutzung gelangt, sowie ferner, dafs es aufser dem verwerteten Prinzipe der

[1]) Czogler, Dimensionen und absolute Mafse der physikalischen Gröfsen.

Erhaltung der Energie zur endgiltigen Erklärung der physikalischen Thatsachen nur noch zweier Prinzipien bedarf[1]) nämlich einmal des Prinzips der **Trägheit** bewegter Masse und andererseits des Prinzips der **Undurchdringlichkeit** der Masse.

Zum Schlufs möchte ich es nicht unterlassen, hervorzuheben, dafs ich mit dieser Arbeit nicht etwa den Anschein erwecken will, als sei es hier zum ersten Male versucht, das Prinzip in den elementaren physikalischen Unterricht einzuführen. Aufser der schon gelegentlich zitierten und verwerteten Spezialabhandlung des österreichischen Professors Januschke, „das Prinzip der Erhaltung der Energie als Grundlage der elementaren Dynamik,“ haben auch schon verschiedene Lehrbücher dem Prinzip eine hervorragende Stelle eingeräumt, ich nenne nur das Lehrbuch der Physik etc. von Professor Dr. Reis. Es soll ferner hiermit nicht ein Stück eines physikalischen Lehrganges gegeben werden, sind doch selbstredend die in einem besonderen Abschnitte zusammengestellten Vorbegriffe im Unterrichte nicht von den Aufgaben zu trennen, sondern an den physikalischen Erscheinungen zu entwickeln. Es soll vielmehr nur versucht werden, zu zeigen, mit wie elementaren Mitteln dieses wichtige Prinzip selbst bei knapp bemessener Stundenzahl behandelt werden kann und wie viel es selbst zur Vereinfachung der Methoden der Entwicklung der physikalischen Gesetze beiträgt.

[1]) Herwig, Physikalische Begriffe und absolute Mafse (§ 14).

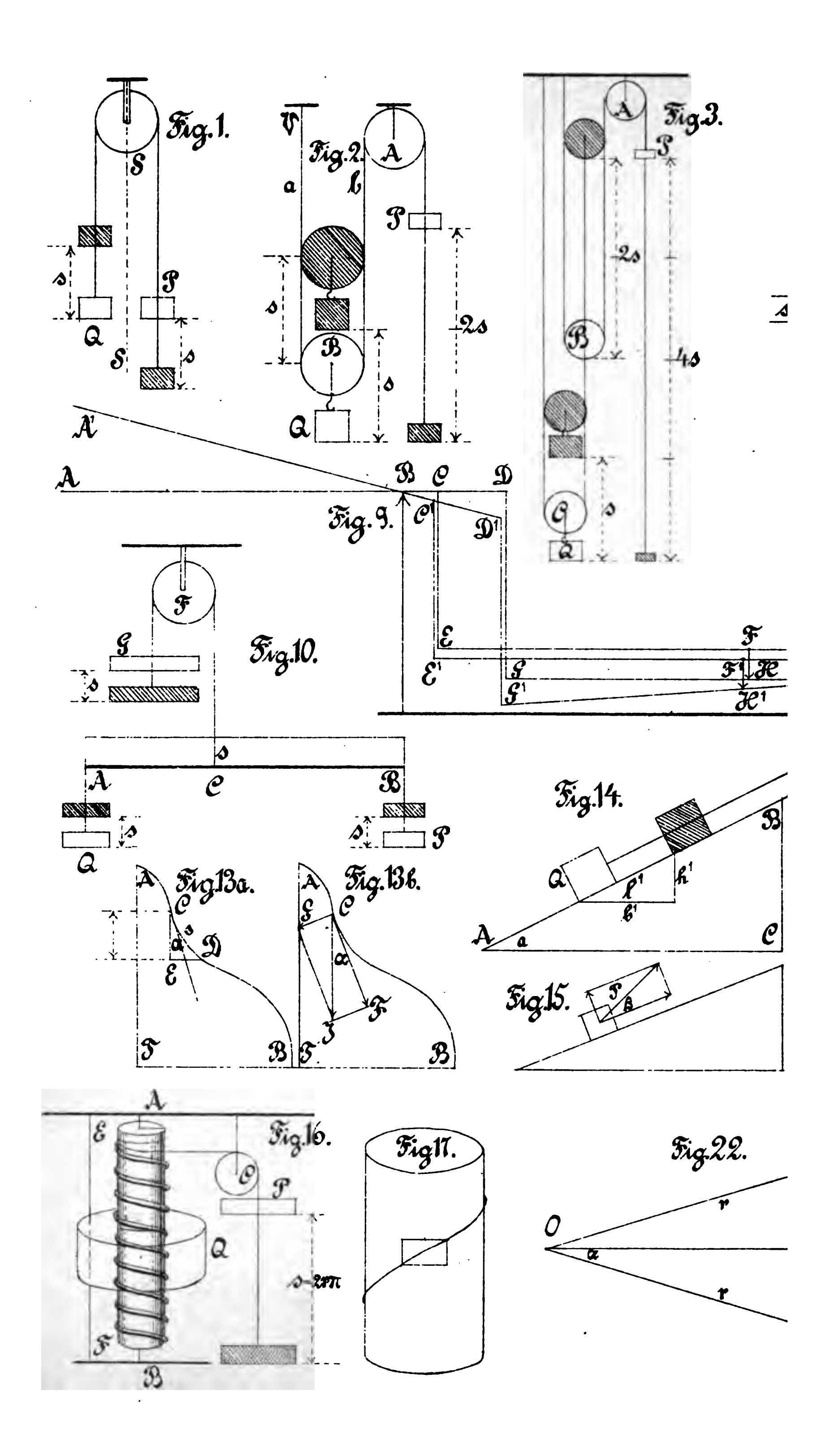


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 13a.
Fig. 13b.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig 17.
Fig. 22.